Physique Statistique — Prof: A. RACHADI

Corrigé de l'exercice III - Série 5 du TD — 2014/2015

> Pour les étudiants qui n'ont pas eu l'occasion d'assister à la dernière séance du TD

III – L'hamiltonien : $H = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}$ avec $\vec{\mu} = g\mu_B\vec{J}$

on choisit $\vec{B} // (oz) \rightarrow H = -g\mu_B J_z \cdot B$.

1 - La fonction de partition est donnée par : $Z = \mathrm{Tr}\, e^{-\beta H}$.

si on connait les états propres de H avec les valeurs propres correspondantes $\rightarrow H = \sum_m e^{-\beta E_m}$

ceci est possible car les états propres de H sont les mêmes que ceux de J_z ($H = -g\mu_B B J_z$). Or J_z a $2J+1$ états propres $|m\rangle$ de valeurs propres : $m: -J, \dots, J$.

$$\Rightarrow Z = \sum_{m=-J}^{+J} e^{\beta g\mu_B B m} = \sum_{m=-J}^{+J} e^{\eta m} \quad \text{avec } \eta = \beta g\mu_B B = \frac{g\mu_B B}{kT}$$

$$Z = e^{-J\eta} + e^{-(J-1)\eta} + \dots + e^{(J-1)\eta} + e^{J\eta}$$

(chaque terme s'obtient du précédent : $\times e^{\eta}$, $\times e^{\eta}$)

c'est la somme de $k = 2J+1$ termes d'une progression (série) géométrique de premier terme : $u_0 = e^{-J\eta}$ et de raison $q = e^{\eta}$ $\Rightarrow Z = u_0 \frac{1-q^k}{1-q}$

$$Z = e^{-J\eta}\frac{1 - e^{(2J+1)\eta}}{1 - e^{\eta}} = \frac{e^{-J\eta} - e^{(J+1)\eta}}{1 - e^{\eta}} = \frac{e^{-(J+\frac{1}{2})\eta} - e^{(J+\frac{1}{2})\eta}}{e^{-\eta/2} - e^{\eta/2}} \quad \leftarrow \left(\frac{\times e^{-\eta/2}}{\times e^{-\eta/2}}\right)$$

$$\Rightarrow Z = \frac{\mathrm{sh}(J+\frac{1}{2})\eta}{\mathrm{sh}(\eta/2)} \Rightarrow \boxed{Z = \frac{\mathrm{sh}\left[(J+\frac{1}{2})\frac{g\mu_B B}{kT}\right]}{\mathrm{sh}\left(\frac{g\mu_B B}{2kT}\right)}}$$

2°/ Valeur moyenne du moment magnétique : $\langle\mu_z\rangle$. $\mu_z = g\mu_B J_z$

On peut utiliser la formule $\langle\mu_z\rangle = \frac{\sum_{m=-J}^{+J} g\mu_B m\, e^{\beta g\mu_B B m}}{Z}$

ou bien, on peut remarquer que $E = \langle H\rangle = -\langle\mu_z\rangle B \Rightarrow \langle\mu_z\rangle = -\frac{\langle H\rangle}{B}$

$$\text{or : } \langle H\rangle = -\frac{\partial \mathrm{Log} Z}{\partial\beta} = -\frac{1}{Z}\cdot\frac{\partial \mathrm{Log} Z}{\partial\eta}\cdot g\mu_B B = -g\mu_B B\,\frac{\mathrm{sh}(\eta/2)}{\mathrm{sh}(J+\frac{1}{2})\eta}\left[\frac{(J+\frac{1}{2})\mathrm{ch}(J+\frac{1}{2})\eta\,\mathrm{sh}\frac{\eta}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{ch}\frac{\eta}{2}\,\mathrm{sh}(J+\frac{1}{2})\eta}{\mathrm{sh}^2(\eta/2)}\right]$$

$$\Rightarrow \langle H \rangle = -g\mu_B B \left[(J+\tfrac{1}{2}) \coth (J+\tfrac{1}{2})\eta - \tfrac{1}{2} \coth \eta/2 \right]$$

$$\Rightarrow \langle H \rangle = -g\mu_B B J \, B_J(\eta) \quad \text{avec} \quad B_J(\eta) = \frac{1}{J}\left[(J+\tfrac{1}{2}) \coth (J+\tfrac{1}{2})\eta - \tfrac{1}{2} \coth \eta/2 \right]$$

est la fonction de Brillouin.

$$\Rightarrow \boxed{\langle \mu_z \rangle = g\mu_B J \, B_J(\eta)}$$

3°/ $g\mu_B B \ll kT \Rightarrow \eta \ll 1$

pour $x \ll$ $\coth x = \frac{ch x}{sh} \simeq \frac{1 + x^2/2}{x + x^3/6} \simeq \left(1+\frac{x^2}{2}\right) \times \frac{1}{x}\left(1+\frac{x^2}{6}\right)^{-1} \simeq \frac{1}{x}\left(1+\frac{x^2}{2}\right)\left(1-\frac{x^2}{6}\right)$

$$\simeq \frac{1}{x}\left(1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^2}{6}\right) \sim \frac{1}{x}\left(1+\frac{x^2}{3}\right) \simeq \frac{1}{x}+\frac{x}{3}$$

$$\Rightarrow B_J(\eta) \simeq \frac{1}{J}\left\{ (J+\tfrac{1}{2}) \left[\frac{1}{(J+\frac{1}{2})\eta} + \frac{(J+\frac{1}{2})\eta}{3} \right] - \frac{1}{2}\left[\frac{2}{\eta} + \eta/6 \right] \right\} \simeq \frac{J+1}{3}\eta$$

$$\Rightarrow \langle \mu_z \rangle \simeq \frac{g\mu_B J(J+1)}{3}\eta \simeq \frac{g^2\mu_B^2 B J(J+1)}{3kT}$$

L'aimantation de la substance est $M = \sum_{i=1}^{N} \mu_{zi} \Rightarrow \langle M \rangle = N \langle \mu_z \rangle$

La susceptibilité magnétique est donnée par :

$$\chi = \frac{\partial \langle M \rangle}{\partial B} \rightarrow \chi = \frac{N g^2 \mu_B^2 J(J+1)}{3kT}$$

c'est la loi de Curie

4°/ $g\mu_B B \gg kT \Rightarrow \eta \gg 1$.

$x \gg \Rightarrow \coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \sim 1$

$$B_J(\eta) \sim \frac{1}{J}\left[(J+\tfrac{1}{2}) - \tfrac{1}{2} \right] \sim 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle \mu_z \rangle = g\mu_B J}$$

(N.B : c'est la valeur maximale du ~~fait~~ moment magnétique d'un atome ; ceci st due au fait que pour $g\mu_B B \gg kT$; le champ magnétique arrive à gagner la compétition contre le désordre imposé par la température et fait orienter le moment de l'atome dans sa direction.

~~5°~~

5°/ Entropie : $S_a = k \log Z_a + \frac{E_a}{T}$ (pour un atome). ($E_a = \langle H \rangle$ voir question 2°)

$$= k \log Z_a - g\mu_B B J \, B_J(\eta) \times \frac{1}{T}$$

Pour les N atomes : $S = N S_a = Nk\left[\log \frac{sh(J+\frac{1}{2})\eta}{sh\,\eta/2} - \frac{g\mu_B B J}{kT} B_J(\eta) \right]$

$$\boxed{S = Nk\left[\log \frac{sh(J+\frac{1}{2})\eta}{sh\,\eta/2} - \eta J B_J(\eta) \right]}$$

Variations de S en fonction de η :

* pour $\eta \gg 1$: $B_J(\eta) \approx 1$

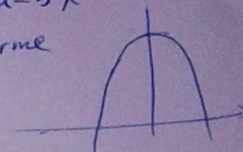
$$Z_a = \frac{sh(J+\frac{1}{2})\eta}{sh\frac{\eta}{2}} \sim \frac{e^{(J+\frac{1}{2})\eta} - e^{-(J+\frac{1}{2})\eta}}{e^{\eta/2} - e^{-\eta/2}} \sim e^{J\eta}$$

$$\Rightarrow S = Nk\left[\operatorname{Log} e^{\eta J} - \eta J\right] \Rightarrow \underline{\underline{S=0}}$$

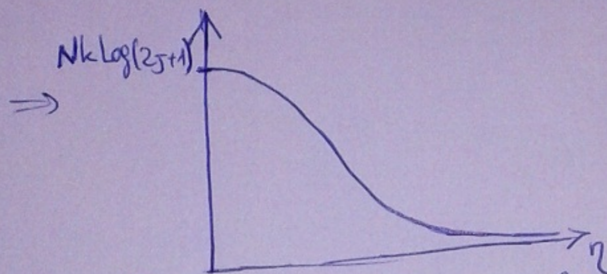
* pour $\eta \ll 1$: $B_J(\eta) \approx \frac{J+1}{3}\eta$

$$Z_a = \frac{sh(J+\frac{1}{2})\eta}{sh\frac{\eta}{2}} \simeq \frac{(J+\frac{1}{2})\eta}{\eta/2} \sim 2J+1$$

$$\Rightarrow S = Nk\left[\operatorname{Log}(2J+1) - \eta^2 \frac{J(J+1)}{3}\right]$$ → Branche parabolique $f(x) \sim a - bx^2$ ↳ forme



⇒



La valeur $S_{max} = Nk\log(2J+1)$ est maximale pour S ; elle correspon au désordre maximal où chaque atome peut prendre de manière équiprobable chacune des valeurs de J_z qui sont de $2J+1$ valeurs.

6°/ a-

Etat initiale ⟶ Etat final

i : S_i, T_i, B_i — Transformation adiabatique — f : S_f, $T_f = ?$, $B_f = 0$

Transformation adiabatique $\Rightarrow S_f(\eta_f) = S_i(\eta_i)$

$$\Rightarrow \eta_f = \eta_i \Rightarrow \frac{g\mu_B B_f}{kT_f} = \frac{g\mu_B B_i}{kT_i} \Rightarrow T_f = \frac{B_f \cdot T_i}{B_i} = 0 .$$

$T_f = 0°K \ \forall B_i$

ce résultat n'est pas correct de manière physique ; il est basé sur une expression de l'entropie obtenue à partir d'une expression idéale qui suppose qu'il n'y a pas d'interaction entre les moments des différents atomes.

b - Entropie réelle $S = Nk\left[\operatorname{Log} Z_a - \eta J B_J(\eta)\right] - \frac{A}{2T^2}$; si on pose $S_i = S_f$ avec $\eta_f = 0$ on peut calculer $T_f \Rightarrow$ A.N : $T_f = 3{,}26 \cdot 10^{-2}\,°K$.